بسم الله الرحمن الرحيم

اقلیدس، اصول و دو هزار سال تلاش

شامل:

نگاهی اجمالی به اصول هندسهٔ اقلیدس و مشکلات و تغییرات آن و به ویژه تاریخچهٔ اصل توازی

گردآوری:

عرفان اعظمی منش

پیش گفتار:

هندسه زادهٔ نیاز انسان به اندازه گیری است. واژهٔ هندسه هم، در تحلیل، آخر به «اندازه گیری زمین[1]» بر می‌گردد. اما عوامل طبیعی و نیازها تنها دلیل پیشرفت آن نیستند. اگر نگاهی کلی به پیشرفت ریاضیات بیاندازیم می‌بینیم که تقریباً ریاضیات کاربردی و ریاضیات مجرد پابه‌پای هم پیش رفته‌اند و اگر در دوره‌ای، یکی بر دیگری پیشی گرفته است، طولی نکشیده که نوع دیگر عقب ماندگی خود را جبران کرده است. در واقع ریاضیات کاربردی و ریاضیات مجرد مرزی مشخص ندارند. مرزبندی‌های بسیاری در تاریخ ریاضی ایجاد شده، که بعد از مدت کوتاهی دگرگون شده‌اند. زیادند مفاهیمی که در هنگام کشف آنها به دلیل مجرد و بی کاربرد بودنشان باعث عدم توفیق کاشفانشان در جلب نظر معاصران خود شده اند؛ اما به زودی گره‌هایی در علوم کاربردی پیش آمده که کاربرد فراوان آن مفاهیم را به همگان ثابت کرده است.

در مورد هندسه نیز وضع به همین صورت است. ابتدا نیاز انسان به اندازه گیری زمین تنها عامل به وجود آمدن هندسه بود. سپس جذابیت هندسه، آن را به سوی هندسه نظری کشاند و اندکی بعد همان مفاهیم کاربردهایی انکار ناپذیر پیدا کردند. در اویل راهِ هندسه، نقش اساسی را در انتقال از هندسهٔ کاربردی به دورهٔ هندسهٔ نظری، دانشمندانی از یونان باستان چون تالس، دموکریت، اودوکس، فیثاغورث، اقلیدس و ... بازی کردند. به ویژه نقش اصلی را در جمع‌آوری و تنظیم هندسهٔ استدلالی، مدیون اقلیدس، ریاضیدان یونانی هستیم و بنابر همین دِین ما در اینجا سعی داریم که به بررسی اتفاقات و تحولاتی که سرچشمهٔ آنها اثر معروف اقلیدس است بپردازیم.

در حدود یک سده و نیم پیش انقلابی در زمینهٔ هندسه روی داد که از لحاظ علمی به عمق انقلاب کپرنیکی در نجوم، و از جنبهٔ نتایج فلسفی به اهمیت نظریهٔ تکامل داروین بود. کاکستر، هندسه دان کانادایی می نویسد: «تأثیر کشف هندسهٔ هذلولوی در تصوّری که از حقیقت و واقعیت داریم آنچنان عمیق بوده است که به دشواری می توانیم تصور کنیم که امکان وجود هندسه ای غیر از هندسهٔ اقلیدسی تا چه اندازه در سال ۱۸۲۰ تکان دهنده جلوه کرده است.» اما همهٔ ما امروزه نام هندسهٔ فضا– زمان نظریهٔ نسبیت اینشتین را شنیده ایم. «در واقع، هندسهٔ پیوستار فضا– زمان به حدی به هندسهٔ نا اقلیدسی وابسته است که آگاهی از این هندسه ها شرط لازم برای درک کامل جهانشناسی نسبیت است.»

اقلیدس[2] و کتاب او

از اقلیدس اطلاعات زیادی بدست ما نرسیده و تقریباً همهٔ چیزهایی که از او می‌دانیم حاصل نوشته‌های پروکلوس[3]، فیلسوف یونانی است.

[1] *Geometry*
[2] *Euclid (300 BC).*
[3] *Proclus (410-485).*

اقلیدس در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد می‌زیسته و به دعوت بطلمیوس اول، در اسکندریه هندسه درس می‌داده است. روزی شاه، بطلمیوس اول، از اقلیدس می‌پرسد که آیا راه ساده‌تر و نزدیکتری از کارهای او برای یاد گرفتن هندسه وجود دارد؟ و اقلیدس پاسخ می‌دهد: «هیچ راه شاهانه‌ای برای هندسه وجود ندارد». همچنین نقل می‌کنند: هنگامی که اقلیدس داشت قضیه اول خود را درس می‌داد یکی از شاگردانش از او پرسید: «از یاد گرفتن اینها چه چیزی به من می‌رسد؟». اقلیدس غلام خود را صدا زد و گفت: «چیزی به این مرد بدهید؛ او انتظار دارد از هندسه چیزی عایدش شود».

مهمترین چیزی که از اقلیدس به جای مانده است کتابی است به نام «اصول[1]» که مشتمل بر ۱۳ کتاب در باب هندسه و نظریه اعداد است. کتاب‌های اول تا ششم در مورد هندسهٔ مسطحه، کتاب‌های هفتم تا نهم شامل مباحثی از نظریه اعداد، کتاب دهم راجع به اعداد گنگ و بقیه دربارهٔ هندسهٔ سه بعدی یا هندسهٔ فضایی نوشته شده‌اند.

«اصول» که همچون دیگر آثار اقلیدس فاقد مقدمه و معرفی است، کتابی بدون مثال، بدون محاسبه، بدون بیانی لطیف، بدون پیش درآمد و آماده سازی و...و تنها شامل قضایا و اثبات آنهاست.

این کتاب که حدود ۲۳۰۰ سال پیش نوشته شده و قدیمی‌ترین نسخه آن مربوط به ۸۸۸ میلادی، در آکسفورد نگهداری می‌شود؛ بعد از کتاب مقدس دارای آمار بیشترین ترجمه و انتشار در اروپا است و از زمان نوشته شدن آن تا کنون، به عنوان یک کار شگفت‌انگیز مورد توجه بوده و توسط تمام ریاضیدانان، حتی بزرگترین ریاضیدان باستان یعنی ارشمیدس، مطا لعه شده است. اعتبار کتاب اقلیدس از این جا معلوم می‌شود که در طول بیش از دو هزار سال که از زمان نوشتن آن می گذرد همهٔ هندسه‌های مقدماتی، یا عین کار اقلیدس و یا تحت تأثیر نوشته او بوده است. «اصول» اولین کتابی است که توانسته است آموزش هندسه را به روالی منطقی و قابل فهم درآورد. وانگهی، روش بنداشتی که اقلیدس به کاربرد، الگویی است برای آنچه که ما امروز «ریاضیات محض[2]» می نامیم. «محض» به معنی «اندیشهٔ محض» است: هیچ تجربهٔ عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست، تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضایا بود.

به گفتهٔ پروکلوس، اقلیدس در کتاب خود، قضیه‌های اودوکس را جمع آوری کرده، بسیاری از مطالب تئائتتوس را تصحیح و مطالب پراکنده و بی سامان نوشته شده تا آن زمان را کامل و ساماندهی کرده است.

اقلیدس در این کتاب ابتدا تعاریفی برای نقطه، خط، خط راست و... می‌آورد و در ادامه پنج به اصطلاح اصل متعارفی *(Axiom)* بیان می‌کند که بدیهی و شهودی‌اند و باید بدون اثبات پذیرفته شوند و تقریباً در همه جا عمومیت دارند. سپس اصولی شهودی مختص هندسه ارائه می‌کند که باید بدون اثبات پذیرفته شوند و آنها را اصل

[1] *Elements.*
[2] *Pure Mathematics.*

موضوع *(Postulate)* می‌نامد. در واقع فرق بین اصل متعارفی و اصل موضوع در عمومیت اولی و اختصاصی بودن دومی است. البته امروزه دیگر جدایی بین آنها برداشته شده و همه را اصل موضوع یا «بُنداشت» می‌نامند. معروف‌ترین و مهم‌ترین قسمت کتاب اقلیدس هم همین ده اصل می‌باشد که توجه بسیاری از ریاضیدانان را در طی قرنها به خود جلب کرده و سرچشمه تحولات بسیاری در هندسه شده و از همهٔ آنها مهمتر پنجمین اصل موضوع، معروف به اصل توازی اقلیدس است. سیر تاریخی این تحولات همچون داستانی هیجان انگیز و پر ماجراست. برخی تعاریف، اصول متعارفی و اصول موضوع اقلیدس در زیر آمده است:

برخی تعاریف:

- یک نقطه چیزی است که هیچ جزء ندارد.(دارای بُعد نیست)
- یک خط یک امتداد بدون پهناست.
- نهایت قسمتهای یک خط نقطه‌ها هستند.
- خط مستقیم، خطی است که به نحوی هموار و یکنواخت بر نقاط خود قرار داشته باشد.
- ....
- یک قطر دایره هر خط راستی است که از مرکز رسم شده باشد و در دو طرف انتهای آن بر محیط دایره باشد و یک چنین خطی دایره را به دو نیم تقسیم می‌کند.

اصول متعارفی *(Axioms)*:

۱. اشیای مساوی با یک چیز، با هم مساویند.
۲. چون مساوی‌ها به مساوی‌ها افزوده شوند، مجموع‌ها مساوی خواهند بود.
۳. چون مساوی‌ها از مساوی‌ها تفریق شوند، باقی‌مانده‌ها مساوی خواهند بود.
٤. اشیای منطبق بر یکدیگر با هم مساویند.
۵. کل از جزء خود بزرگتر است.

اصول موضوع *(Postulates)*:

۱. خط مستقیمی از هر نقطه به نقطه دیگری می‌توان رسم کرد.
۲. می‌توان یک خط مستقیم متناهی را به یک خط مستقیم امتداد داد.
۳. دایره ای به مرکز دلخواه و با شعاع هر فاصله‌ای می توان درنظر گرفت.(رسم کرد)
٤. همهٔ زوایای قائمه با یکدیگر مساویند.

۵. اگریک خط مستقیم، دو خط مستقیم را چنان قطع کند که در یک طرف، زوایای درونـی کمتـر از دو قائمـه بسازد، آنگاه اگر دو خط مستقیم به طور نامحدودی امتداد یابند، در همان طرفی که دو زاویهٔ درونیِ کمتر از دو قائمه ساخته شده‌اند، تلاقی می‌کنند.

سپس اقلیدس از این ۱۰ بنداشت، ٤٦٥ گزاره را نتیجه گرفت که بسیاری از آنهـا پیچیـده بودنـد و اصـلاً شـهودی و بدیهی نبودند و تمام اطلاعات زمان او را در بر داشتند. یک دلیل بر زیبایی اصول اقلیدس این است که ایـن همـه را از آن اندک نتیجه گرفته است.

نقایص منطقی «اصول»

قسمت اعظم تلاشهای ریاضیات قرن بیستم صرف بررسی مبانی منطقی و ساختار ریاضیات شده است. ایـن کـار بـه نوبهٔ خود باعث پدیدار شدن مبحث **اصل موضوعیها**، یا مطالعهٔ مجموعه های اصول موضوعه و ویژگیهای آنها شـده است. خود منطق، که به مثابهٔ ابزاری برای به دست آوردن نتایجی از فرضهای پذیرفته شده در ریاضیات به کار گرفته می شد، مورد علاقه قرار گرفت و منطق ریاضی پا به عرصهٔ وجود نهاد. عجیب اینکه اغلـب ایـن ملاحظـات نـوین، نظیر قسمتهایی از ریاضیات، ریشه در آثار یونانیان باستان، و به ویژه در کتاب «اصول» اقلیدس دارند.

به راستی چقدر خوب می شد اگر اثر اقلیدس، این تلاش دیرین و عظیم در روش ارائـهٔ اصـل موضـوعی، عـاری از ایرادهای منطقی می بود. این اثر گرچه بسیار بدیع و با ارزش بود امـا طـی صـدها سـال بـسیاری از ریاضـیدانان بـه نقایص گوناگونی در مفروضات اقلیدس اشاره کردند. شاید بزرگترینِ ایـن نقـایص، فرضـهای تلـویحی (مفروضـات صریحاً بیان نشده) متعددی هستند که اقلیدس می پذیرد، بی آنکه اصول موضوعهٔ وی آنهـا را مجـاز شـمرده باشـند. همچنین برخی از تعاریف مقدماتی نیز در معرض انتقاد قرار دارند. اقلیدس سعی کرده است کلیـهٔ اصـطلاحات فنـی هندسهٔ خود را تعریف نماید ولی در واقع تعریف صریح همهٔ اصطلاحات فنی یک مبحث همانقدر غیر ممکن اسـت که اثبات کلیهٔ احکام آن. زیرا یک اصطلاح فنـی را بایـد بـه کمـک دیگـر اصـطلاحات فنـی تعریـف کـرد، و ایـن اصطلاحات را توسط اصطلاحات دیگر، و الی آخر. به منظور جلوگیری از وقوع دور یا تسلسل ما باید اصـطلاحاتی را بدون تعریف بپذیریم و دیگر اصطلاحات را به کمک آنها تعریف کنیم. در این صورت، در تحلیـل نهـایی، اصـول موضوعه، مبحث گزاره های پذیرفته شده ای در بارهٔ اصطلاحات اولیه اند.این نواقص، از تعـاریف گرفتـه تـا اصـول باعث مشکلات منطقی متعددی شد.

برخی از مشکات منطقی اصول اقلیدس که ریاضیدانان به آن اشاره کرده اند عبارتند از:

- ✓ لزوم گزاره مشخصی در مورد پیوستگی یا تداوم خطوط و دوایر.
- ✓ لزوم گزاره‌ای در مورد امتداد نامتناهی خط مستقیم.

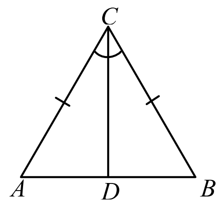
- ✓ لزوم بیان این واقعیت که هر گاه خط مستقیمی از رأس یک مثلث داخل شود، باید ضلع مقابل آن رأس را قطع کند.
- ✓ لزوم گزاره‌هایی در مورد ترتیب نقاط واقع بر خط.
- ✓ لزوم گزاره‌ای در مورد مفهوم در میان بودن (بین بودن).
- ✓ لزوم گزارۀ تضمین کنندۀ یکتایی خط واصل بین دو نقطۀ متمایز.
- ✓ اقلیدس بر این فرض بود که می‌توان مثلثی را برداشت و در حالی که همۀ خواصش بی تغییر باقی مانده‌اند، در محلی دیگر قرار داد، ولی گزاره‌ای در مورد این تغییر نداده بود.
- ✓ لزوم فهرستی از عبارات تعریف نشده.

و اما مثال هایی در مورد این اشکالات:

✍ اقلیدس نقطه را چنین تعریف می کند: «چیزی که هیچ جزء ندارد». آیا شما مفهوم دقیق چیزی که هیچ جزء ندارد را متوجه می شوید. آیا اصطلاحاتِ چیز، جزء و امثال اینها تعریفی روشن دارند. این تعریف امروزه حتی روشنی خود مفهوم نقطه را می کاهد. همچنین تعریف خط به صورت «امتداد بدون پهنا» دچار تسلسل می شود. زیرا امتداد، خود می بایست تعریف شود و یا تعریف مفهوم پهنا به جایی نمی رسد.

✍ در اثبات قضیۀ ۲۱ تلویحاً فرض شده است که وقتی خط مستقیمی از رأس مثلثی داخل آن می شود، در صورتی که به حد کافی امتداد داده شود، ضلع مقابل را قطع می کند. به اثبات زیر برای قضیۀ «زوایای مجاور به قاعده در مثلث متساوی الساقین قابل انطباق اند.» توجه کنید:

ΔABC داده شده است چنانکه $AC \cong BC$ می خواهیم ثابت کنیم $\angle A \cong \angle B$.



۱. فرض می کنیم که نیمساز زاویۀ C ضلع AB را در D ببرد (هر زاویه یک نیمساز دارد).

۲. در ΔACD و ΔBCD داریم: $AC \cong BC$ (بنا به فرض).

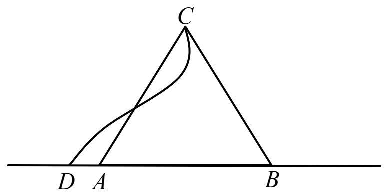
۳. $\angle ACD \cong \angle BCD$ (تعریف نیمساز یک زاویه).

٤. $CD \cong CD$ (چیزهای مساوی، با یکدیگر قابل انطباق اند).

۵. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (ض ز ض).

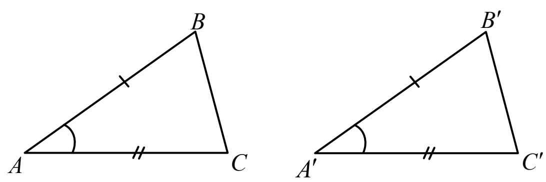
٦. پس $\angle A \cong \angle B$ (زوایای متناظر در مثلثهای قابل انطباق)

مرحلهٔ اول را در نظر بگیرید که دلیل درستیش این است که هر زاویه یک نیمساز دارد. این، حکم درستی است و می توان جداگانه آن را ثابت کرد. ولی از کجا می دانیم که نیمساز $\angle C$، در صورت امتداد $\overleftrightarrow{AB}$ را می برد، یا اگر می برد چگونه می دانیم که نقطهٔ D **میان** A و B واقع است؟ ممکن است این بدیهی به نظر آید ولی اگر بخواهیم دقیق باشیم باید آن را ثابت کنیم. زیرا ممکن است شکل، به صورت زیر باشد. اگر چنین باشد، آنگاه مراحل ۲ تا ۵ باز درست خواهند بود ولی ما تنها می توانیم نتیجه بگیریم که $\angle B$ بر $\angle CAD$ قابل انطباق است، نه بر $\angle CAB$. زیرا که در ΔACD، $\angle CAD$ زاویه ای است که با $\angle B$ متناظر است.



وقتی بُنداشتهای میانبود (بنداشتهایی راجع به ترتیب نقاط واقع بر خط)، بیان شد، آنگاه می توانیم اثباتی برای این فرض تلویحی ارائه دهیم. (البته بعد از مقدار قابل ملاحضه ای کار)

✍ اقلیدس سعی کرده است (ض ز ض) را به عنوان قضیه ای ثابت کند. برهان او اساساً چنین است: $\Delta A'B'C'$ را چنان حرکت می دهیم که نقطهٔ A' بر نقطهٔ A و $\overleftrightarrow{A'B'}$ بر $\overleftrightarrow{AB}$ قرار گیرد. چون مطابق فرض $AB \cong A'B'$، لذا نقطهٔ B' باید بر نقطهٔ B منطبق شود. چون $\angle A \cong \angle A'$، $\overleftrightarrow{A'C'}$ باید بر $\overleftrightarrow{AC}$ قرار گیرد. و چون $AC \cong A'C'$، نقطهٔ C' باید بر C منطبق شود. بنابراین، $B'C'$ بر BC، و بقیهٔ زوایا بر بقیهٔ زوایا منطبق خواهند شد و بدین ترتیب مثلثها قابل انطباق می شوند.



این برهان «برهمنهش[1]» نام دارد و از تجربهٔ رسم دو مثلث بر روی صفحه و بریدن یکی از آنها و گذاردن بر روی دیگری ناشی شده است. گرچه این راه برای متقاعد ساختن یک مبتدی هندسه در قبول (ض ز ض) راه خوبی است، ولی این برهان نیست. اقلیدس آن را با اکراه، جز در اینجا تنها در یک جای دیگر هم به کار برده است. این،

[1] Super Position.

برهان نیست زیرا که اقلیدس هرگز بنداشتی ذکر نکرده بود، که به اتکای آن، اشکال بتوانند حرکت کنند بی آنکه اندازه و شکلشان تغییر کند.

اینها چند مثال از مشکلاتی بودند که تعاریف و بنداشتهای اقلیدس به وجود آورده بود. تنها در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، بعد از آنکه مبانی هندسه موضوع مطالعهٔ همه جانبه ای قرار گرفت، بود که مجموعه های بنداشت رضایت بخشی برای هندسهٔ اقلیدسی تهیه شد. در میان این گونه مجموعه ها برجسته ترینشان به افراد زیر تعلق دارند: م.پاش، ج.پئانو، م.پیری، د.هیلبرت، او.وبلن، ا.و.هانتینگتون، گ.د.بیرکهوف و ل.بلومنتال. از این میان مجموعهٔ بنداشت های هیلبرت[1] و بیرکهوف[2] بیشتر مورد استفاده قرار گرفتند. مجموعهٔ هیلبرت شامل ۲۱ بنداشت است که در پنج گروه آنها را برای هندسهٔ مسطحه و فضایی اقلیدسی ارائه داده است و این گروه بندی به نشان دادن چگونگی غلبه بر مشکلات اقلیدس مدد می رساند. اصطلاحات اولیهٔ هیلبرت **نقطه**، **خط**، **صفحه**، **بر**(قرار دارد بر)، **قابل انطباق** و **بین** هستند. مفهوم تعریف نشدهٔ قابل انطباق تقریباً به همان معنی مساوی در کتاب اقلیدس است اما مفهومی کلیتر از آن دارد. در هندسهٔ دقیق شدهٔ امروز وقتی می گوییم AB با AC مساوی است یعنی این دو دقیقاً یک پاره خط را مشخص می کنند و B بر C منطبق است. اما وقتی می گوییم AB قابل انطباق است با AC، یعنی این دو پاره خط دارای یک طول هستند.اقلیدس برای بیان هر دو از تساوی استفاده می کرد. و همینطور دو زاویه قابل انطباقند اگر تعداد درجه های مساوی داشته باشند. اشیاء مساوی، قابل انطباق نیز هستند. برای بیان قابلیت انطباق از علامت $\cong$ استفاده می کنیم.در زیر برای آنکه ببینیم چطور بر نواقص بنداشتهای اقلیدس غلبه شد، آن دسته از بنداشتهای هیلبرت را که مربوط به هندسهٔ مسطحه می شوند (۱۸ بنداشت) می آوریم:

همانطور که ذکر شد بنداشتهای هیلبرت به پنج گروه تقسیم شده اند: **وقوع**، **میانبود**، **قابلیت انطباق**، **پیوستگی** و **توازی**.

بنداشتهای وقوع:

۱. برای نقطهٔ دلخواه P و نقطهٔ دلخواه Q که با P مساوی نیست، فقط یک خط مانند l وجود دارد که بر P و Q می گذرد.
۲. لا اقل دو نقطهٔ متمایز واقع بر خط دلخواه l وجود دارند.
۳. سه نقطهٔ متمایز وجود دارند، چنانکه هیچ خطی بر هر سه آنها واقع نمی شود.

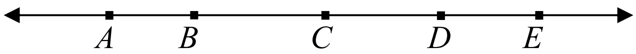
بنداشتهای میانبود:

[1] *David Hilbert (1864-1943)*، ریاضیدان آلمانی و برجسته ترین شخصیت ریاضی در ربع اول قرن بیستم

[2] *G.D. Birkhoff.*

۱. اگر $A*B*C$، آنگاه A، B و C سه نقطهٔ متمایزند که بر یک خط قرار دارند و $C*B*A$.

۲. دو نقطهٔ متمایز B و D داده شده اند. نقاطی مانند A، C و E بر $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند چنانکه $A*B*D$ و $B*C*D$ و $B*D*E$.



۳. اگر A، B و C سه نقطهٔ متمایز بر یک خط باشند، آنگاه یکی و تنها یکی از آنها بین دو تای دیگر است. (این بنداشت ما را مطمئن می سازد که خط دایره ای شکل نیست.)

٤. (جداسازی): به ازای هر خط l و هر سه نقطهٔ A و B و C ناواقع بر l:

(اول) هرگاه A و B در یک طرف l، و B و C در یک طرف l باشند، A و C هم در یک طرف l خواهند بود.

(دوم) هرگاه A و B در دو طرف l، و B و C در دو طرف l باشند، A و C در یک طرف l خواهند بود.

بنداشتهای قابلیت انطباق:

۱. هرگاه A و B دو نقطهٔ متمایز باشند و A' یک نقطهٔ دلخواه، آنگاه به ازای هر نیمخطی مانند r که از A' رسم شود، **فقط یک** نقطه مانند B' بر r وجود دارد چنانکه $B' \neq A'$ و $AB \cong A'B'$.

۲. هرگاه $AB \cong CD$ و $AB \cong EF$ آنگاه، $CD \cong EF$.

۳. هرگاه $A*B*C$ و $A'*B'*C'$ و $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$، آنگاه $AC \cong A'C'$.

٤. هرگاه $\angle BAC$ (که بنابر تعریفِ زاویه، $\overrightarrow{AB}$ متقابل $\overrightarrow{AC}$ نیست)[1]، و همچنین نیمخط نامشخص $\overrightarrow{A'B'}$ که از A' خارج شده است داده شده باشند، آنگاه **فقط یک** نیمخط $\overrightarrow{A'C'}$ در یک طرف معین $\overleftrightarrow{A'B'}$ وجود دارد چنانکه $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.

۵. هرگاه $\angle A \cong \angle B$ و $\angle A \cong \angle C$، آنگاه $\angle B \cong \angle C$؛ بعلاوه، هر زاویه با خودش قابل انطباق است.

٦. (ض ز ض). هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی بترتیب با دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی دیگر قابل انطباق باشند، آن دو مثلث قابل انطباق اند.

بنداشتهای پیوستگی:

۱. بنداشت ارشمیدس: اگر AB و CD دو پاره خط باشند، عددی مانند n وجود دارد چنانکه هرگاه پاره خط CD را n بار بر نیمخط $\overrightarrow{AB}$، ابتدا از A، بگذاریم آنگاه به یک نقطهٔ E می رسیم که $n.CD \cong AE$ و B بین A و E است.

[1] نیمخط های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را متقابل گوییم هرگاه متمایز باشند و از یک نقطهٔ A خارج شوند و جزئی از یک خط $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{AC}$ باشند. و یک زاویه به رأس A عبارت است از نقطهٔ A و دو نیمخط $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ (به نام ضلعهای زاویه) که از نقطهٔ A خارج شده اند و متقابل نیستند.

۲. بنداشت ددکیند: فرض می کنیم مجموعهٔ همهٔ نقاط واقع بر یک خط l، از اجتماع دو زیر مجموعهٔ $\sum_1$ و $\sum_2$، $(\sum_1 \cup \sum_2)$، چنان تشکیل شده باشد که هیچ نقطهٔ $\sum_1$ بین دو نقطهٔ $\sum_1$ نباشد و بعکس. آنگاه یک نقطهٔ منحصر به فردی مانند O بر l وجود دارد چنانکه $P_1 * O * P_2$ اگر، و تنها اگر، $P_1 \in \sum_1$ و $P_2 \in \sum_2$، $O \neq P_1, P_2$.

۳. اصل پیوستگی دایره: اگر دایرهٔ γ یک نقطه در درون دایرهٔ γ' و یک نقطه در بیرون آن داشته باشد، دو دایره همدیگر را در دو نقطه می برند.

٤. اصل پیوستگی مقدماتی: اگر یک سر پاره خطی در درون یک دایره و سر دیگرش در بیرون دایره باشد، آن دایره را می برد.

بنداشت توازی: به ازای هر خط l و هر نقطهٔ P ناواقع بر آن، حداکثر یک خط m وجود دارد چنانکه از P می گذرد و با l موازی است.

می بینیم که بسیاری از نقایص کار اقلیدس که به آنها اشاره کردیم به طور مستقیم در این بنداشتها رفع شده اند. نواقص دیگری هم با استفاده از نتایج این بنداشتها رفع می شوند. مثلاً قضیهٔ (ض ز ض) در اینجا به عنوان یک اصل موضوع مطرح است و دیگر ایراد «حرکت» به بعضی اثباتها وارد نیست. دیگر مشکلات کمبود اصولی راجع به پیوستگی وجود ندارد. اکنون این حکم که «وقتی خط مستقیمی از رأس مثلثی داخل آن می شود، ضلع مقابل را قطع می کند»؛ از بنداشتهای میانبود نتیجه می شود. و بسیاری از مشکلات منطقی دیگر، با ارائهٔ چنین مجموعهٔ بنداشتهایی حل شده اند. اگر باز هم بخواهیم روند تحولات را با داستانی پر ماجرا مقایسه کنیم تا اینجا تنها به ذکر کلیات داستان پرداخته ایم و نقطهٔ اوج داستان باقیست. حل این دست مشکلات کار اقلیدس بیشتر در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم انجام شد و چندان هم به درازا نکشید و تنها باعث تغییراتی در هندسهٔ موجود در «اصول» شد اما اتفاق اصلی به دنیا آمدن موجودی غیر از هندسهٔ اقلیدسی است.

اصل توازی، مشکل اساسی:

اگر نگاهی دوباره به اصول ده گانهٔ اقلیدس که قبلاً آنها را بیان کردیم بیاندازید احتمالاً به اصل موضوع پنجم موسوم به اصل توازی با دیدی کنجکاوانه و مردد نگاه می کنید. گرچه معادلهای متعددی، که برای آن ارائه شده است آن را برای ما بدیهی ساخته؛ اما بیان خودِ اقلیدس چنان بداهتی را ندارد. و از طرفی ممکن است نفی آن را خلاف عقل سلیم بپندارید. آلبرت اینشتین زمانی گفته است که «عقل سلیم، در واقع چیزی نیست بجز لایه هایی از مفاهیم که قبلاً انگاشته، و قسمت اعظم آنها پیش از سن هجده سالگی در حافظه و احساس ما انباشته شده اند.» شاید اگر ما برای اولین با و بدون آموزش ها و القاءهای قبلی و با دیدی منتقدانه به متن اصلی یا ترجمهٔ بدون ترمیم «اصول»

برخورد می کردیم، اصل توازی بیشتر از هر قسمت دیگری ما را به تأمل وا می داشت. اتفاقی که برای اکثر ریاضیدانانی که این کتاب را بررسی کردند افتاد. بیشتر کار این افراد در زمینهٔ «اصول»، مربوط به اصل توازی است. اصلی که ایجاز سایر اصول را ندارد، و به هیچ وجه دارای صفت «بدیهی» نیست. در واقع عکس قضیهٔ ۱۷ اقلیدس است و بیشتر به یک قضیه شباهت دارد تا یک اصل. بعلاوه خود اقلیدس هم از آن تا وقتی به قضیهٔ ۲۹ می‌رسد استفاده نمی‌کند و این نشان دهندهٔ عدم رضایت اقلیدس از اصلِ خود می‌باشد. طبیعی بود که لزوم واقعی این اصل مورد سؤال قرار گیرد و چنین تصور شود که شاید بتوان آن را به عنوان قضیه‌ای از اصول دیگر استخراج کرد، یا حداقل بتوان به جای آن معادل قابل قبول تری را قرار داد. از جانشینهای متعددی که برای قرار دادن به جای اصل توازی اقلیدس پیشنهاد شده‌اند، رایجترین‌شان اصلی است که در اعصار جدید توسط فیزیکدان و ریاضیدان اسکاتلندی ، جان پلی‌فیر (۱۷۴۸–۱۸۱۹) معروف شده است؛ گرچه این بدیل خاص توسط دیگران مورد استفاده بوده و توسط پروکلوس در قرن پنجم بیان شده بوده است. این، جایگزینی است که معمولاً در کتابهای دبیرستانی دیده می‌شود: *بر یک نقطهٔ مفروض خارج خطی، تنها یک خط به موازات خط مفروض می‌توان رسم کرد.* (قضیهٔ ۲۷ وجود حداقل یک خط را تضمین می‌کند.)(همان اصل توازی که هیلبرت به کار برد)

اقلیدس خطوط موازی را خطوطی واقع در صفحه تعریف کرد که هر اندازه آنها را در هر جهت امتداد دهیم تلاقی نمی‌کنند. توجه کنید که این تعریف چه نمی گوید: *نمی گوید که دو خط به یک فاصله از یکدیگرند یعنی نمی گوید که فاصلهٔ بین دو خط در همه جا یکی است.*

اصل توازی اقلیدس : «اگر یک خط مستقیم، دو خط مستقیم را چنان قطع کند که در یک طرف، زوایای درونی کمتر از دو قائمه بسازد، اگر دو خط مستقیم به طور نامحدودی امتداد یابند، در همان طرفی که دو زاویه درونی کمتر از دو قائمه ساخته شده‌اند، تلاقی می‌کنند.»

هندسهٔ نتاری[1] (هندسه بی بنداشت توازی)

از آنجا که در اصل توازی جای شک و شبه، بسیار بود، ریاضیدانان سعی کردند قسمتی از هندسه را که مستقل از این اصل بود، گسترش دهند. این هندسه که هندسهٔ نتاری(خنثی) نامیده می شود از تمامی بنداشتهای هندسهٔ اقلیدسی منهی بنداشتهای توازی برای اثبات قضایا استفاده می کند. اگر تلاشها برای اثبات اصل توازی با استفاده از اصول دیگر به نتیجه می رسید آنگاه اصل توازی به صورت قضیه ای در هندسهٔ نتاری در می آمد و هندسهٔ نتاری تمامی هندسهٔ اقلیدسی را در بر می گرفت. هم ارزی های بین اصل توازی اقلیدس و اصول جانشینی که بعدها ارائه شد به عنوان قضایایی در هندسهٔ نتاری مورد مطالعه قرار می گیرند.

[1] *Neutral Geometry.*

برای آشنایی بیشتر چند قضیه از این هندسه را می آوریم:

✍ قضیهٔ ساکری– لژاندر: مجموع اندازه های سه زاویه از هر مثلث برحسب درجه، *کمتر از* یا *مساوی با* ۱۸۰ درجه است.

✍ نتیجهٔ قضیهٔ بالا: مجموع اندازه های درجات زاویه ها درهر چهارضلعی کوژ[1]، حداکثر برابر ۳۶۰ درجه است.

✍ اصل پنجم اقلیدس ⇔ اصل توازی هیلبرت.

✍ اصل توازی هیلبرت ⇔ مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

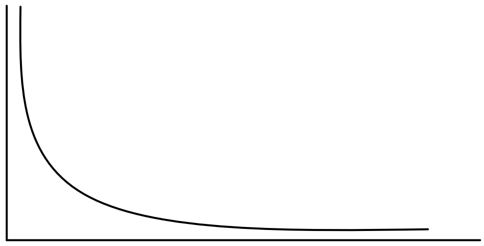
✍ هرگاه مثلثی که مجموع زوایایش ۱۸۰ درجه است وجود داشته باشد ، آنگاه مستطیل وجود دارد و در نتیجه مجموع زوایای هر مثلث مساوی ۱۸۰ درجه است.

تلاشها:

حال به بررسی بعضی از تلاشهایی که در طی قرنها برای نتیجه گیری اصل توازی از دیگر بنداشتها یا بعبارتی درآوردن این اصل به شکل قضیه ای در هندسهٔ نتاری انجام شد می پردازیم:

پروکلوس

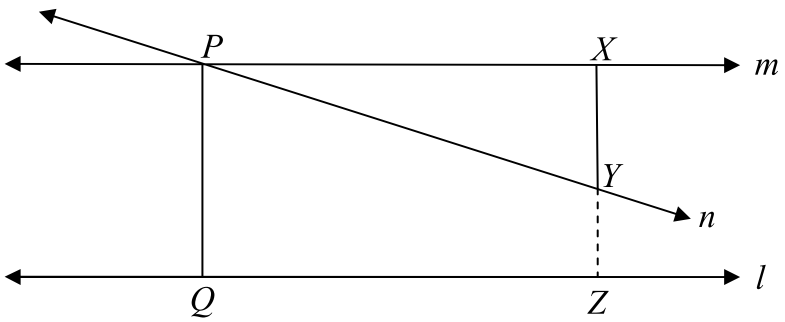
پروکلوس(۴۱۰ تا ۴۸۵ بعد از میلاد)، که شرح او بر کتابِ اصول، یکی از منابع اصلی ما در زمینهٔ هندسهٔ یونان است، از اصل توازی بدین گونه انتقاد کرده است: «این را باید حتی از شمار اصول موضوعه بیرون آورد. زیرا این قضیه ای است که دشواری های زیادی در بر دارد و بطلمیوس در کتابی به گشودن آنها همت گمارده است... این حکم که، چون دو خط را هر چه امتداد دهیم بیش از پیش به هم نزدیک می شوند و سرانجام همدیگر را می برند، پذیرفتنی است ولی نه همیشه.» پروکلوس یک هذلولوی را مثال می زند که آن اندازه که بتوان تصور کرد به مجانب هایش نزدیک می شود بی آنکه هرگز آنها را ببرد. این مثال نشان می دهد که لااقل ممکن است تصوری مخالف نتیجه گیریهای اقلیدس هم داشت. پروکلوس می گوید: «پس روشن است که باید برای این قضیهٔ کنونی برهانی بیابیم و این، مخالف ماهیت خاص اصول موضوعه است.»



[1] به طور ساده یک چهارضلعی را کوژ گوییم اگر امتداد هیچ ضلعی از آن پاره خط ضلع روبرویش را قطع نکند.

تا آنجا که می دانیم نخستین تلاشی که برای اثبات به عمل آمده، از آن بطلمیوس بوده است. بی آنکه وارد جزئیات این برهان شویم باید بگوییم که او، بی آنکه خود متوجه باشد، اصل توازی هیلبرت را پذیرفته است. اصل توازی هیلبرت نیز منطقاً با اصل توازی اقلیدس هم ارز است. لذا بطلمیوس آنچه را که می خواست ثابت کند قبول می کرد یعنی استدلال او به دور منجر می شد.

سعی پروکلوس برای اثبات اصل توازی چنین است: « دو خط موازی l و m داده شده اند. فرض کنیم خط n خط m را در نقطهٔ P می برد. می خواهیم نشان دهیم که n خط l را هم می برد. فرض می کنیم Q پای عمودی باشد که از P بر l وارد شده است. اگر n بر $\overleftrightarrow{PQ}$ منطبق باشد، پس l را در Q بریده است وگرنه نیمخطی مانند $\overrightarrow{PY}$ از n بین $\overleftrightarrow{PQ}$ و نیمخطی مانند $\overrightarrow{PX}$ از m قرار دارد. فرض کنید که X پای عمود مرسوم از Y بر m است.



حال، وقتی نقطه Y بر خط n از نقطهٔ P بینهایت دور شود، پاره خط XY اندازه اش بینهایت بزرگ می شود و سرانجام از پاره خط PQ تجاوز می کند. بنابراین، Y باید از l بگذرد و در طرف دیگر آن قرار گیرد، یعنی n باید l را ببرد. »

مطالب بند بالا جان کلام برهان پروکلوس است؛ برهان نسبتاً پیچیده ای است که شامل حرکت و پیوستگی است. از آن گذشته، درستی هر مرحله از برهان را می توان نشان داد جز اینکه نتیجه ای که می خواهیم از آن بدست نمی آید! چگونه می توان درستی آخرین مرحله را ثابت کرد؟ فرض کنیم عمود YZ را از Y بر l فرود آورده ایم. آن وقت شما می توانید بگویید که (۱) X و Y و Z بر یک خط قرار دارند، و (۲) $XZ \cong PQ$. بنابراین، هنگامی که XY از PQ بزرگتر می شود، باید از XZ هم بزرگتر شود. و در نتیجه Y باید در طرف دیگر l قرار گیرد. در اینجا نتایج، واقعاً از احکام (۱) و (۲) حاصل می شوند. مشکل کار این است که اثباتی برای درستی این دو حکم وجود ندارد!

اگر این مطلب انسان را به تأمل وا می دارد علتش این است که شکل بالا احکام (۱) و (۲) را درست به نظر جلوه می دهد. اما ما مجاز نیستیم برای درستی اثبات یک مرحله، از شکل استفاده کنیم. هر مرحله باید از روی بنداشتها و یا از روی قضایایی که قبلاً ثابت شده اند ثابت شود. بعدها ثابت شد که اثبات این احکام، بدون استفاده از اصل توازی ممکن نیست.

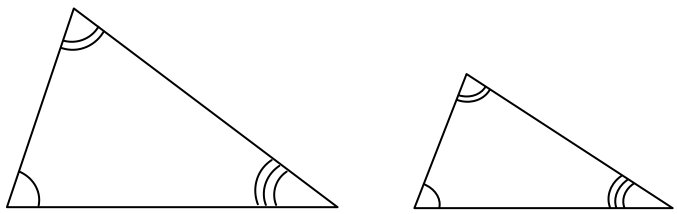
ریاضیدانان ایرانی

در راه نتیجه گیری اصل توازی از اصول دیگر، ریاضیدانان ایرانی از جمله فضل حاتم نیریزی، عمرخیام و خواجه نصیرالدین طوسی نیز کوشیدند ولی نتیجه این شد که اصل موضوع دیگری به جای آن قرار دادند یا با استفاده از یک فرض ضمنی که در نهایت هم ارز با اصل توازی بود به اثبات آن پرداختند. خیام در کتاب خود که اختصاص به این موضوع دارد[1] چهارضلعی های دوقائمهٔ متساوی الساقین را مطرح می کند. او از چهارضلعی هایی صحبت می کند که دو ضلع روبرو با هم برابر و بر قاعده عمود باشند. بعد ابتدا ثابت می کند، دو زاویهٔ دیگر این چهارضلعی با هم برابرند و با جانشین کردن اصل دیگری به جای اصل توازی اقلیدس، حاده یا منفرجه بودن دو زاویهٔ دیگر را رد می کند. خواجه نصیرالدین طوسی نیز کارهایی در این زمینه انجام داد و طرح خیام به وسیلهٔ او به کشورهای اروپایی منتقل شد. اما اینها هم اثباتی رضایت بخش نبود. در طول این سالها دائماً معادلهایی برای اصل توازی ارائه می شد.

والیس[2]

از دیگر ریاضیدانانی که وارد این میدان شدند والیس بود. او تلاش برای اثبات اصل توازی در هندسهٔ نتاری را رها کرد و در عوض بنداشت تازه ای، که حس می کرد بیش از اصل توازی مقبول است طرح نمود، سپس اصل توازی را از روی این بنداشت تازه و بنداشتهای دیگر هندسهٔ نتاری ثابت کرد.

اصل والیس: مثلث نا مشخص ΔABC و پاره خط نامشخص DE داده شده اند. مثلثی مانند ΔDEF (به ضلع DE) وجود دارد چنانکه با ΔABC متشابه[3] است (و چنین نموده می شود: $\Delta DEF \sim \Delta ABC$).



از اثبات والیس بگذریم. اثبات او نیز چیز تازه ای نداشت تنها قضیهٔ زیر به هندسهٔ نتاری افزوده شد:

«اصل توازی $\Leftrightarrow$ اصل والیس»

دیگر دلیلی وجود ندارد که اصل والیس را پذیرفتنی تر از اصل اقلیدس بدانیم، زیرا این دو اصل منطقاً هم ارزند.

---

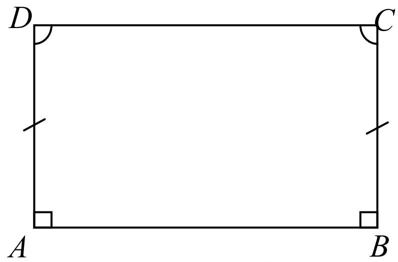
[1] کتابِ «شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس».

[2] جان والیس *John Wallis (1616-1703)*، ریاضیدان تراز اول انگلیسی پیش از نیوتن. او بود که نماد ∞ را برای «بینهایت» وارد کرد.

[3] یادآوری می کنیم که مثلثهای متشابه، مثلثهایی را گویند که بتوان یک تناظر یک به یک میان رئوس آنها برقرار کرد چنانکه زوایای متناظر قابل انطباق باشند.

ساکری[1] و لامبرت[2]

در سال ۱۷۳۳ اولین پژوهش علمی واقعی، توسط کشیش یسوعی ایتالیایی جیرولامو ساکری به چاپ رسید. مطالعات وی از مؤثرترین کارها در به انجام رسیدن مسئلهٔ توازی بود. وی طی تدریس علم معانی و بیان، فلسفه، و الاهیات در یک دانشکده یسوعی در میلان، «**اصول**» اقلیدس را خواند و شیفتهٔ روش قدرتمند **برهان خلف** شد. بعداً کتاب «برهان منطقی» خود را منتشر کرد که نوآوری عمده در آن، کاربرد روش برهان خلف در مبحث منطق صوری است. ساکری درست پیش از مرگ کتابِ کوچکی به نام «*اقلیدس عاری از هر خطا*» چاپ کرد که در واقع تا یک و نیم قرن بعد که ائوجینو بلترامی آن را دوباره کشف کرد، مورد توجه واقع نشد.[3]



فکر ساکری برای اثبات اصل توازی این بود که از یک برهان خلف استفاده کند. او نقیض اصل توازی و ۲۸ قضیهٔ اول اقلیدس را پذیرفت و سپس کوشید تا تناقضی را از آن نتیجه بگیرد. او چهارضلعی هایی شبیه آنها که خیام مطرح کرده بود را مورد مطالعه قرار داد. یک چهارضلعی مانند $ABCD$ که در آن زوایای A و B قائمه اند و اضلاع AD و BC قابل انطباق اند و بعدها به چهارضلعی ساکری معروف شد. در هندسهٔ نتاری به آسانی می توان ثابت کرد که زوایای دو رأس دیگر قابل انطباق اند. (با رسم قطرهای AC و BD و استفاده از قضایای همنهشتی ساده که در ۲۸ قضیهٔ اول اقلیدس وجود دارند.) یعنی $\angle C \cong \angle D$.

سه حالت ممکن است پیش آید:

حالت ۱: زاویه های بالایی قائمه اند.

حالت ۲: زاویه های بالایی منفرجه اند.

حالت ۳: زاویه های بالایی حاده اند.

اثبات اصل توازی معادل با اثبات حالت یک بود. ساکری برای اثبات این حالت کوشش کرد نشان دهد که دو حالت دیگر به تناقض منجر می شوند. او توانست نشان دهد که حالت دوم به تناقض می رسد: «**اگر زاویه های بالایی منفرجه باشند، مجموع زاویه های چهارضلعی بیش از ۳۶۰ درجه می شود، که با نتیجهٔ قضیهٔ ساکری– لژاندر متناقض است.**»

---

[1] جیرولامو ساکری، *Girolamo Saccheri (1667-1733)* ، ریاضیدان ایتالیایی.

[2] یوهان هاینریش لامبرت، *Johann Heinrich Lambert (1728-1777)*،ریاضیدان سویسی.

[3] توضیحاتی داستان گونه برای توجیه بی اعتنایی طولانی نسبت به شاهکار ساکری داده شده است. مثلاً در:
E.T. Bell, The Magic of Numbers, chapter 25.

اما او هر اندازه تلاش کرد نتوانست تناقضی در حالت سوم به دست آورد و آن را «فرض خصمانهٔ زاویهٔ حاده» نامید. او موفق شد نتایج بسیار عجیبی به دست آورد ولی تناقضی به دست نیاورد و سرانجام از روی عجز بانگ برآورد: «فرض زاویهٔ حاده مطلقاً غلط است، زیرا که با ذات خط مستقیم ناسازگار است!.» ساکری تناقض نامتقاعد کننده ای را که شامل مفاهیم مبهمی در باب عناصر لایتناهی بود، به زحمت در بحث خود وارد کرد. اگر وی این اندازه مشتاقِ نشان دادن تناقضی نمی شد، و به جای آن عدم توانایی خود را برای یافتن تناقضی می پذیرفت، افتخار کشف هندسهٔ نااقلیدسی بدون تردید امروزه نصیب او می شد.

سی و سه سال بعد از انتشار اثر ساکری یوهان هاینریش لامبرت، رسالهٔ تحقیقیِ مشابهی تحت عنوان «نظریهٔ موازیها» نوشت که تا بعد از مرگش به چاپ نرسید. لامبرت یک چهارضلعی با سه زاویهٔ قائمه را به عنوان شکل بنیادی خود برگزید و سه فرض را، حاده، منفرجه یا قائمه بودن زاویهٔ چهارم در نظر گرفت. وی در استخراج قضیا از دو فرض حاده و منفرجه به مراتب بیشتر از ساکری پیش رفت. او نشان داد که کاستی مجموع زوایای مثلث در فرض حاده و زیادتی آن در فرض منفرجه، با مساحت مثلث متناسب اند. وی می پنداشت که فرض زاویهٔ حاده به هندسه ای در روی «کره ای با شعاع موهومی» مربوط می شود[1] و به شباهت بین هندسهٔ ناشی از فرض زاویهٔ منفرجه و هندسهٔ کروی پی برد. فرض زاویهٔ منفرجه باز هم به سادگی به تناقض رسید و کنار گذاشته شد، اما نتایج وی در رابطه با فرض زاویهٔ حاده مبهم و غیر رضایتبخش ماندند.

تلاشهایی که برای اثبات اصل پنجم اقلیدس صورت گرفته بود به اندازه ای زیاد بود که گ.ز.کلوگل در ۱۷۶۳ موفق شد رساله ای برای دکترا تهیه کند که در آن نقایص ۲۸ برهان مختلف از اصل توازی را پیدا و در ثابت شدنی بودن آنها اظهار تردید کند. دایره المعارف نویس و ریاضیدان فرانسوی ژ.ل.ر.دالامبر[2] کلمهٔ «افتضاح هندسه» را بهترین توصیف برای این اوضاع یافت. حتی شصت سال پس از او آدرین ماری لژاندر، یکی از برجسته ترین آنالیزدانهای فرانسه، کار را با سه فرض فوق از سر گرفت. گرچه او کوشش های متعددی انجام داد اما نتوانست کاری صورت دهد. این تلاشها در ویرایشهای متوالی «*اصول هندسهٔ*» وی، که مقبولیت عام داشت، ظاهر شد. بدین ترتیب وی در رواج دادن مسئلهٔ اصل توازی نقش زیادی داشت. ریاضیدانان بتدریج نا امید می شدند.

فورکوش بویوئی[3] مجارستانی از دیگر دانشمندانی که عمری در راه حل مسئلهٔ موازی ها تلاش کرده بود به پسرش یانوش که سودای حل مسئله را داشت، نوشت:

[1] بلترامی بعداً نشان داد که هندسهٔ روی یک شبه کره (*pseudo sphere*) در فرض زاویهٔ حاده صدق می کند.

[2] *Jean Le Rend d'Alembert.*

[3] *Farkas (or Wolfgang) Bolyai.*

« تو دیگر نباید برای گام نهادن در راه توازیها تلاش کنی. من پیچ و خمهای این راه را از اول تا آخر آن، می شناسم؛ این شب بی پایان را که همهٔ روشنایی و شادمانی زندگی مرا به کام نابودی فرو برده است سپری کرده ام. التماس می کنم که دانش موازیها را رها کنی. من در این اندیشه بودم که خود را در راه حقیقت فنا کنم. حاضر بودم شهیدی باشم که این نقص هندسه را مرتفع سازد و پاک شدهٔ آن را به عالم بشریت تقدیم نماید. من زحمتی عظیم و سترگ کشیدم. آنچه را من آفریدم به مراتب برتر از آفریدهٔ دیگران است، ولی باز هم رضای خاطر به دست نیاوردم ... وقتی دریافتم که هیچ کس نمی تواند به پایان این شب ظلمانی راه یابد، بازگشتم؛ بی تسلای خاطر بازگشتم؛ در حالی که برای خود و بشریت متأسف بودم.
می پذیرم که انتظار بیجایی است که بخواهم تو از راه خود منحرف شوی، اما، به نظرم می رسد که من مدتها در این دیار بوده ام و به تمامی صخره های جهنمی این دریای مرده سفر کرده ام و همیشه با دکل شکسته و بادبان پاره پاره برگشته ام. تباهی وضع و سقوط من به آن دوران باز می گردد. من از روی بی فکری زندگانی و خوشبختیم را به مخاطره افکندم. *یا امپراتور یا هیچ.*[1] »

این نامه به خوبی شدت نا امیدی ریاضیدانان اوایل قرن نوزدهم را نشان می دهد. اصل توازی به کابوسِ دانشِ موازیها تبدیل شده بود...

کشف هندسهٔ نااقلیدسی[2]

جالب است که وقتی زمان برای ظهور اندیشهٔ نوینی کاملاً مناسب است، آن اندیشه در نزد چند کس، کم و بیش همزمان، پدیدار می شود. کشف هندسهٔ نااقلیدسی نیز از این گونه رویدادهاست.

یانوش بویوئی[3]

یانوش پسر فورکوش بویوئی به توصیه ها و التماس های پدر مبنی بر وارد نشدن به دریای مردهٔ دانش موازی ها عمل نکرد و از اخطارهای او نهراسید. او اندیشه ای نوین در سر داشت و فکر می کرد که به چیزهایی تازه دست یافته است. او فرض می کرد که نقیض اصل اقلیدس حکمی بی معنی نیست و در ١٨٢٣ به پدر نوشت:

« اکنون نقشهٔ قطعی من این است که به محض اینکه مطالب را کامل و مرتب کنم و فرصتی بدست آورم، کتابی دربارهٔ موازیها چاپ کنم. فعلاً هنوز راه خود را به روشنی نمی بینم ولی، راهی که پیش گرفته ام نشان می دهد که به هدف خواهم رسید، اگر اساساً این هدف رسیدنی باشد. ولی چیزهایی که کشف کرده ام به اندازه ای شگفت انگیزند که خودم حیرت زده شده ام. و بدبختی جبران ناپذیری خواهد بود اگر اینها از دست بروند. پدر جان، وقتی آنها را ببینید خواهید فهمید که چه می گویم. در شرایط کنونی، تنها چیزی که می توانم بگویم این است که **از هیچ، دنیایی تازه و شگفت انگیز آفریده ام**. آنچه را قبلاً برای شما فرستادم از لحاظ مقایسه با آنچه که اکنون پدید آورده ام بسان خانه ای است مقوایی در مقابل برجی رفیع. اطمینان من به افتخارهایی که این کشفها نصیب من خواهند کرد کمتر از اعتقادم به مباهاتی نیست که در تکمیل آنها احساس خواهم کرد. »

[1] شعار سزار بورژیا، و در نتیجه شعار هر جاه طلب.

[2] *Non-Euclidean Geometry*

[3] یانوش (یوهان) بویوئی، *(Janos (or Johann) Bolyai (1802-1860*، ریاضیدان مجارستانی.

پدر نیز که در کارهای پسرش چیزی متفاوت می دید و از همه مهمتر احساس می کرد که این مطالب درستند و نیز به این مطلب که اندیشه ها همزمان ظهور می کنند واقف بود، به یانوش جوان اینگونه توصیه کرد:

«به نظر من مصلحت این است که اگر واقعاً توفیق یافته ای راه حلی برای این مسئله بیابی، به دو دلیل باید در انتشار آن شتاب کنی: نخست، بدین علت که اندیشه ها به آسانی و خیلی زود از یکی به دیگری، که ممکن است آنها را منتشر سازد، منتقل می شوند. ثانیاً بدین سبب که به نظر درست می آید که بسیاری از چیزها، همانگونه که همیشه بوده است دورانی دارند که در آن همزمان، در چند جا کشف شده اند؛ نظیر گلهای بنفشه که در بهاران همه جا پدید می آیند. »

یانوش بویوئی اکتشافات خود را به صورت یک ضمیمهٔ ۲٦ صفحه ای در کتاب «تنتامن»[1]، در ۱۸۳۱ که توسط پدرش نوشته شده بود منتشر کرد. پدر یک نسخه از این کتاب را با شوق فراوان برای دوست آلمانیش گاوس که بزرگترین ریاضیدان مسلم آن عصر بود فرستاد. یانوش انتظار داشته است که گاوس کار مهم او را به مردم معرفی نماید. بنابراین می توان به درجهٔ یأس او پس خواندن نامه ای که گاوس به پدرش نوشته بود پی برد. گاوس در این نامه نوشته بود که « تمجید از آن به منزلهٔ تمجید از خودم است. زیرا تمام محتوای کاری را که پسر شما کرده، راهی را که برگزیده و نتایجی را که به آنها رسیده، تقریباً به طور تمام و کمال با تحقیقات خود من که مدت سی تا سی و پنج سال تمام فکر مرا به خود مشغول داشته است یکی است. » او می گوید که خود به تمام این دستاوردها رسیده اما چون بیشتر مردم بینش لازم برای درک آنها را نداشته اند قصد داشته است، اجازه ندهد که تا هنگام مرگش، کسی از آنها با خبر شود. او در آخر نامه اش می نویسد: « لذا باعث کمال خوشوقتی است که می بینم دیگر لازم نیست این کار (چاپ نوشتها) را انجام دهم، بخصوص که این فرزند دوست دیرین من است که به چنین شیوهٔ عالی بر من پیشی گرفته است.»

به رغم تمجیدی که گاوس در آخرین جمله اش از او کرده بود، یانوش از جوابِ ریاضیدان بزرگ نا امید شد و حتی پنداشت که پدر در نهان گاوس را از نتایج کارهای او آگاه می ساخته است، و گاوس اکنون سعی دارد آنها را به عنوان کار خویش تصاحب کند. یانوش که مزاجی آتشین داشت و سیزده بار پیاپی دوئل کرده و پیروز شده بود (یاد گالوا به خیر) چنان سرخوردگی پیدا کرد که دیگر چیزی چاپ نکرد، گرچه انبوهی از دست نوشته ها از خود به جای گذاشت. ترجمهٔ «ضمیمهٔ» جاودانی او را می توان در کتاب *هندسهٔ نا اقلیدسی*، اثر بونولا یافت[2].

گاوس[3]

شواهدی در دست است بر اینکه گاوس پیشتر از بویوئی به برخی از اکتشافات هندسهٔ نااقلیدسی دست یافته بوده است. از جلمه نامه هایی که به دیگر دانشمندان می نوشته و یا نوشته هایی در پاسخ دانشمندانی که راه حل خود،

---

[1] کوششی برای ارائهٔ مقدمات ریاضیات محض به دانشجویان جوان.

[2] *R.Bonola, Non-Euclidean Geometry*

[3] کارل فردریش گاوس، *Carl Friedrich Gauss (1777-1855)* ، ریاضیدان آلمانی که لقب امیر ریاضیات به داده اند.

برای مسئهٔ توازی را به او ارائه می کردند. او در ۱۸۲٤ (تقریباً ۵ سال قبل از چاپ کتاب تنتامن) در نامه ای به ف.آ.تاورینوس[1] که تلاش زیادی در بررسی نظریهٔ موازیها به عمل آورده بود؛ به رفع شدنی بودن نقص کار او در رابطه با فرض زاویهٔ منفرجه اشاره می کند و ادامه میدهد: « ولی وضع در قسمت دوم، که مجموع زوایا نمی تواند کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، کاملاً متفاوت است. این نقطه ای است بحرانی و صخره ای است که همهٔ کشتیها را در هم می شکند. ... من بیش از سی سال روی آن فکر کرده ام و باور نمی کنم کسی بیش از من به این قسمت دوم اندیشیده باشد، هرچند هرگز چیزی در این زمینه منتشر نکرده ام. پذیرفتن اینکه مجموع سه زاویه کمتر از ۱۸۰ درجه باشد به هندسهٔ شگفت انگیزی منجر می شود که با هندسهٔ اقلیدسی ما بکلی متفاوت، اما کاملاً سازگار است و من آن را بسط داده ام و کاملاً از آن راضی هستم. ... قضایای این هندسه به باطلنما می مانند و شاید در نظر فردی مبتدی بی معنی جلوه کنند. ... مثلاً سه زاویهٔ مثلث تا بخواهید می توانند کوچک شوند به شرطی که اضلاع آن به اندازهٔ کافی بزرگ شوند، و تازه اضلاع مثلث هر چه باشند، مساحت مثلث نمی تواند از حد معینی زیادتر شود و در واقع هیچ گاه هم نمی تواند به آن برسد. » و در انتها تأکید می کند که: «پروا ندارم از اینکه آنچه گفتم مورد سوء تعبیر کسانی واقع شود که به ظاهر ذهن ریاضی اندیشمندی دارند، ولی در هر حال، این را به عنوان یک نامهٔ خصوصی تلقی کنید که به هیچ وجه مورد استفادهٔ عموم یا مورد استفاده ای که به نحوی صورت تبلیغ پیدا کند، قرار نگیرد، شاید در آینده، هنگامی که نسبت به امروز فراغت بیشتری دست دهد، بررسیهایم را منتشر سازم.»

جای شگفتی است که گاوس، با وجود شهرت عظیمش، از علنی ساختن کشفیاتش در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی عملاً بیمناک بوده است. او به ه.ک.شوماخر گفته بوده است که «از کشیده شدن به هر نوع کشمکشی نفرت دارد.» دلیل دیگر اینکه او در ارائه کشفیات خود تردید داشت این بود که او کمالگرا بود، یعنی کسی که تنها کارهای کمال یافتهٔ هنری را منتشر می کرد. این روحیهٔ او حتی از شعار روی مهرش قابل درک است: «**کم ولی پخته**». می گویند ریاضیدان نامی ک.گ.یاکوبی(ژاکوبی)[2] تنها به این دلیل، اغلب برای تبادل نظر دربارهٔ اکتشافاتش نزد گاوس می آمد که گاوس را وادار کند مقالاتی را که در زمینهٔ همان کشفیات بوده اند از کشوی میزش بیرون بکشد.

لباچِفسکی[3]

گرچه در مورد بویویی و گاوس پیش از این صحبت کردیم، اما گاهی برندهٔ اصلی یک مسابقه آخرین فردی است که معرفی می شود. در این نمایشنامهٔ تاریخی بازیگر دیگری گوی شهرت را از بویوئی و گاوس ربود؛ ریاضیدان روسی نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی. وی نخستین کسی بود که عملاً مقاله ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی منتشر کرد. او قسمت عمدهٔ زندگی خود را در دانشگاه قازان، ابتدا به صورت دانشجو، بعداً به عنوان استاد ریاضیات و سرانجام به عنوان رئیس دانشکده، گذرانید. برای نخستین بار در ۲۳ فوریهٔ سال ۱۸۲٦، در نشست فیزیک- ریاضی، لباچفسکی

---

[1] *F.A. Taurinus.*
[2] *K.G. Jacobi.*
[3] نیکولای ایوانوویچ لباچِفسکی، *Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)*، ریاضیدان روسی.

کشف خود را ارائه کرد. نخستین مقالهٔ او دربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی در سالهای ۱۸۲۹–۱۸۳۰ در *بولتن قازان*، دو یا سه سال پیش از آنکه اثر بویوئی به چاپ برسد، منتشر شد.هنگامی که اثر او منتشر شد چندان مورد توجه قرار نگرفت، بیشتر به این علت که به زبان روسی نوشته شده بود و روسیهایی که آنرا می خواندند سخت خرده گیری می کردند. لباچفسکی تلاش اولیهٔ خود را با نوشتن آثار دیگر دنبال نمود. مثلاً به امید یافتن گروه وسیعتری خواننده، در سال ۱۸٤۰ کتاب کوچکی به زبان آلمانی تحت عنوان «**تحقیقات هندسی در باب نظریهٔ موازیها**» منتشر کرد. لباچفسکی هندسه اش را در آغاز «هندسهٔ موهومی[1]» نامید. گاوس وقتی با نظریهٔ لباچفسکی آشنا شد در نامه ای بـه شوماخر او را مورد ستایش قرارد و اعلام کرد که به لباچفسکی به صورت یک مؤلف می نگرد که «دربارهٔ هندسه همچون یک خردمند بحث کرده است»؛ ولی نظر خود را جایی چاپ نکرد و به خود لباچفسکی نیز اطلاع نداد؛ در حالی که لباچفسکی تأییدیهٔ یک ریاضیدان بزرگ را نیاز داشت. لباچفسکی در سال ۱۸۵۵، یک سال پیش از مرگش و بعد از آنکه نابینا شده بود، رساله ای نهایی و خلاصه تر به زبان فرانسه تحت عنوان «**هندسهٔ عام**[2]» به چاپ رساند. خود لباچفسکی آنقدر نزیست که کار خود را مورد تأیید عامه ببیند، ولی به هندسهٔ نااقلیدسی که او پدید آورد، امروزه اغلب **هندسهٔ لباچفسکی** اطلاق می شود. هندسهٔ او انقلابی واقعی در ریاضیات بود. برخی از دانشمندان او و کارش را همسان کپرنیک در اخترشناسی خواندند. روی آرامگاه کپرنیک در لهستان نوشته اند: «خورشید ساکن است، زمین می چرخد».

پروفسور کاگان می نویسد: « من خوشحالم اعلام کنم: حکم ساکن بودن خورشید و چرخیدن زمین، ساده تر از آن است که حکم کنیم: مجموع زوایای یک مثلث کمتر از آن است که فکر می کنیم.»

روند تولد هندسهٔ لباچفسکی:

در ادامهٔ تلاشها برای حل مسئلهٔ توازی، لباچفسکی موضوع را از دید اصل توازی پلی فیر، با در نظر گرفتن سه امکان زیر مورد توجه قرار داد: از یک نقطهٔ مفروض می توان **بیش از یک خط**، یا **فقط یک خط** موازی خط مفروض رسم کرد، و یا **هیچ خطی** نمی توان رسم کرد. این موارد، به ترتیب، با فرضهای زاویهٔ حاده، قائمه، و منفرجه در چهارضلعی های ساکری و لامبرت معادل اند. حالت سوم به سادگی با استفاده از قضایای هندسهٔ نتاری نفی می شود. اما وی بعد از مدتی به وجود هندسهٔ سازگاری تحت اولین فرض پی برد. لباچفسکی غیر قابل اثبات بودن اصل پنجم اقلیدس در هندسهٔ نتاری را ثابت کرد. یعنی ثابت کرد که این اصل از اصول دیگر کاملاً مستقل است و به جای آن، این حکم را گذاشت: «از هر نقطه بیرون یک خط راست، دست کم می توان دو خط راست

[1] *Imaginary geometry.*
[2] *Pan geometry.*

رسم کرد که خط راست مفروض را قطع نکند.» او با آنکه هندسهٔ خود را که بر اصلی متضاد با اصل اقلیدس ساخته بود بسیار پیش برد، در هیچ جا به تناقضی برخورد نکرد. از اینجا لباچفسکی نتیجه گرفت که نمی توان اصل توازی اقلیدس را به یاری اصول موضوع دیگر ثابت کرد و با پذیرفتن همهٔ اصل موضوع های اقلیدسی و نفی اصل پنجم آن، هندسهٔ نااقلیدسی را بنیان گذاشت.

هندسهٔ لباچفسکی و سازگاری آن

اسقلال واقعی اصل موضوع توازی از سایر اصول تا زمان براهین سازگاری برای فرض زاویهٔ حاده، به گونه ای که سوال برانگیز نباشد ، ثابت نشد. باید متذکر شویم که سازگاری به این معنی است که هرگز به حکمی بر نخواهیم خورد که اصلی را نقض کند. ارائهٔ این براهین چندان طول نکشید و توسط بلترامی، آرثر کیلی، فلیکس کلاین، هانری پوانکاره و دیگران فراهم شد. روش آن عبارت بود از وضع مدلی در هندسهٔ اقلیدسی که بتواند به بسط انتزاعی فرض زاویهٔ حاده تعبیری عینی در قسمتی از فضای اقلیدسی بدهد. که در اینصورت هر ناسازگاری در هندسهٔ نااقلیدسی موجب یک ناسازگاری متناظر در هندسهٔ اقلیدسی می شود.

بدین ترتیب تلاش دو هزار سالهٔ ریاضیدانان به ثمر نشست و نتیجهٔ مستقیم کشف هندسهٔ نااقلیدسی به سرانجام رسیدن مسئلهٔ دیرینهٔ اصل موضوع توازی بود: **اصل موضوع توازی مستقل از اصول موضوعهٔ دیگر است و هندسه ای که از نقیض آن بعلاوهٔ همهٔ اصول دیگر تشکیل شده به همان اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی سازگار است.**

.کشف هندسهٔ لباچفسکی، یک دورهٔ کامل را در دانش گذرانده است و در فیزیک امروزی، کاربرد خود را به دست آورده است. از جمله، فضای نظریهٔ مکانیک امروزی، بر اندیشه های لباچفسکی استوار است.

هندسه های دیگر

علاوه بر هندسهٔ نااقلیدسی که در بالا معرفی شد هندسه های نا اقلیدسی دیگری نیز وجود دارند که اصل موضوع توازی خاص خود را دارند. البته در این هندسه ها نمی توان تنها اصل موضوع توازی را عوض کرد و به جای آن اصلی دیگر نهاد و یک هندسهٔ نااقلیدسی جدید سازگار به وجود آورد. اما هندسه هایی هستند با تغییر کمی در اصول دیگر به وجود می آیند. مثلاً در سال ١٨٥٤، ریمان نشان داد که اگر نا متناهی بودن خط مستقیم کنار گذاشته شود و صرفاً بی کرانگی آن مورد پذیرش واقع شود، آنگاه با چند جرح و تعدیل در بنداشتهای دیگر، هندسهٔ سازگار نااقلیدسی دیگری را می توان از فرض زاویهٔ منفرجه یا معادلاً از این فرض که از یک نقطه خارج یک خط، هیچ خطی موازی با آن وجو ندارد؛ بدست آورد. مثلاً در این هندسه که ریمان معرفی کرد، باید بنداشتهای مربوط به میانبود را تغییر داد و یا ممکن است از دو نقطه تعداد بیشمار خط بگذرد. به عنوان مثال اگر صفحه را کره، نقاط را نقاط واقع بر سطح کره، و خطوط را دوایر عظیمهٔ کره تعریف کنیم، این نوع هندسه در آن بر قرار است. به عنوان مثال هر دو خط یعنی هر دو دایرهٔ عظیمه در دو نقطه تلاقی می کنند.کلاین در سال ۱۸۷۱ به این سه هندسه، یعنی

هندسهٔ لباچفسکی، هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ ریمان به ترتیب نامهای **هندسهٔ هذلولوی**[1]، **هندسهٔ سهموی**[2]، **و هندسهٔ بیضوی**[3] داد.

درک هندسهٔ هذلولوی به اندازهٔ درک هندسهٔ اقلیدسی ساده است اما درک هندسه‌های نااقلیدسی دیگری چون هندسهٔ بیضوی مستلزم تسلط بر نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و شامل مفاهیمی پیچیده است. در انتها باید گفت که اگر نگاهی کلی به تحولات هندسه از یونان باستان تا امروز بیافکنیم، باز هم در جای جای آن ردپای یک اثر بدیع و قابل تحسین به نام «اصول» را خواهیم دید. مطالعهٔ کامل تاریخ تحولات هندسه و ورود به دنیای نااقلیدسی به مراتب جذاب تر و ارزشمندتر از این چکیدهٔ ناقص است.

پایان

[1] *Hyperbolic*
[2] *Parabolic*
[3] *Elliptic*

منابع:

---

۱. هندسه های اقلیدسی و نا اقلیدسی، ماروین جی. گرینبرگ، ترجمهٔ م.هـ.شفیعیها

۲. هندسه های جدید، جیمز. ار. اسمارت، ترجمهٔ غلامرضا یاسی پور.

۳. آشنایی با تاریخ ریاضیات، هاورد و. ایوز، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل، جلد دوم.

٤. کتاب کوچک ریاضی ۲۸. : تاریخ ریاضیات، پرویز شهریاری.

۵. سایت های اینترنتی در زمینهٔ هندسه، از جمله مقالهٔ *History of Non-Euclidean Geometry* از سایت زیر:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk